基礎アルゴリズムとその証明

数理情報系 4 年

甲本健太

目次

1. オーダー記法

$$T(n) = O(f(n)) \iff \exists c > 0.\exists n_0 \in \mathbb{N}.[n > n_0 \Rightarrow T(n) \le cf(n)]$$

$$\begin{aligned} T(n) = o(f(n)) &\iff \forall c > 0.\exists n_0 \in \mathbb{N}.[n > n_0 \Rightarrow T(n) \le cf(n)] \\ &\iff \lim_{n\to\infty} T(n)/f(n) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &T(n) = \Theta(f(n)) \\ &\iff \forall c_1, c_2 > 0.\exists n_0 \in \mathbb{N}.[n > n_0 \Rightarrow c_1 f(n) \le T(n) \le c_2 f(n)] \end{aligned}$$

2. ソートアルゴリズム (1/)

定義：ソート

全順序が定義された順序付き集合を，その順序にしたがって並べること．

1. バブルソート

アルゴリズム

$i = 1, 2, \ldots, n-2;\ j = i, i+1, \ldots, n-1$ の順に以下の操作を行う．

> $A[j], A[j+1]$ を比較し，$A[j] > A[j+1]$ ならば要素を入れ替える．

正当性

$i = 1$ のとき，最大要素が $A[n]$ に移動する．$i = 2$ のとき，次に大きい要素が $A[n-1]$ に移動する．以下，帰納的に成り立つ．

計算量

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = n(n-1)/2$$

より $O(n^2)$．

2. マージソート

アルゴリズム

1. 長さ n の配列 A を長さ $n/2$ の左半分 A_l と右半分 A_r に分割する
2. A_l, A_r を再帰的にそれぞれソートする
3. A_l, A_r について，小さい方の要素から順にとっていくことで A の整列集合を得る

正当性

帰納的に示す．A_l, A_r が正しくソートされていると仮定する．このときステップ 3 で A_l, A_r の要素を昇順に並べた配列，すなわち A のソート済み配列が得られる．

計算量

漸化式 $T(n) = 2T(n/2) + cn$ より，$T(n) = O(n \log n)$ となる．

3. グラフ (3.1 グラフの基本用語)

3.2 最小木 (1/)

定理：最小木定理

$G = (V, E)$ の全域木 T に対し，「T が最小木 $\iff$ 任意の補木辺 $e \in E \setminus T$ に対し，e によって定まる基本閉路を C_e とすると，$f \in C_e$ ならば $w(f) \le w(e)$」

必要性（$\Rightarrow$）の証明

ある辺 $f \in C_e$ について $w(f) > w(e)$ と仮定する．このとき $T' = T \setminus \{f\} \cup \{e\}$ を考えると $w(T) > w(T')$ である．また T は全域木である．（$\because$ 路が f を使っていた場合，代わりに $C_e - f$ を使えばよい．）よって，T の最小性に矛盾．

十分性（$\Leftarrow$）の証明

T を右辺の条件を満たし最小木でない全域木とする．また，T^* を $|T \setminus T^*|$ が最小になるような最小木とする．ある辺 $e \in T^* \setminus T$ を取りその端点を u, v とすると，e は T^* を 2 つの連結成分 T^*_u, T^*_v に分割する．また，T の基本閉路 C_e を考えると，C_e 上には端点がそれぞれ T^*_u, T^*_v に含まれるような辺 f が存在する．仮定より，$w(f) \le w(e)$ である．ここで，$T^{*\prime} := T^* \setminus \{e\} \cup \{f\}$ とすると，$w(T^{*\prime}) \le w(T^*)$ かつ $T^{*\prime}$ が全域木であることから $T^{*\prime}$ は最小木．したがって $|T \setminus T^*|$ の最小性に矛盾．

4. 動的計画法